ЗАДАЦИ — III НЕДЕЉА

1. Нека је $(\mathbb{N}, \sigma, 0)$ модел природних бројева. Доказати да је $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2. (ЈЕДИНСТВЕНОСТ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА)
Нека су $(N_A, \sigma_A, 0_A)$ и $(N_B, \sigma_B, 0_B)$ два модела природних бројева и нека је $f: (N_A, \sigma_A, 0_A) \to (N_B, \sigma_B, 0_B)$ хомоморфизам.
   а) Доказати: $f(m) = 0_B \Rightarrow m = 0_A$.
   б) Доказати да је f инјективна.
   в) Доказати да је f бијекција.
   г) Закључити да је скуп природних бројева јединствен до на изоморфизам алгебарских структура.

3. * Доказати да је $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m+n = n+m \land m \cdot n = n \cdot m$.
(помоћ: индукција по n)

4. Доказати да је $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ комутативни прстен са јединицом.

5. * Доказати да је $(\mathbb{N}, \leq)$ тотално уређен скуп.

6. * Нека је $(A, \leq)$ тотално уређен скуп, $K \subseteq A$ коначан. Доказати да тада $\exists \max K$, $\exists \min K$ и да се елементи скупа K на јединствен начин могу поређати у растућем поретку.

7. Доказати да сваки непразан подскуп од $(\mathbb{N}, \leq)$ има минимум. Да ли сваки подскуп од $(\mathbb{N}, \leq)$ има и максимум?

8. Доказати да коначан скуп није истобројан ни са једним својим правим подскупом.

9. (Дирихлеов принцип) Нека су A и B коначни скупови такви да $\text{card } A < \text{card } B$. Доказати да не постоји пресликавање $f: B \to A$ које је инјективно.
Да ли ово важи за бесконачне скупове?